# 5 КОМПЛЕКС АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯНЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ

## 5.1 Туынды ұғымы

$D$ облысында анықталған $W = f(z)$ бірмәнді функциясы берілсін.

**Анықтама 17**. $W = f(z)$ бірмәнді функциясының $D$ жиынына тиісті $z$ *нүктесіндегі туындысы* деп

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

тиянақты шегін айтамыз. $f(z)$ функциясының $z$ нүктесіндегі туындысы $f'(z)$ немесе $\frac{d\,f(z)}{dz}$ түрлерінде белгіленеді:

$$f'(z)=\frac{d\,f(z)}{dz}=\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}. \qquad (5.1)$$

$z$ нүктесінде туындысы бар $f(z)$ функциясы осы нүктеде *дифференциалданатын* функция деп аталады.

$$f(z) = U(x;\, y) + i\cdot V(x;\, y)$$

түрінде берілген $f(z)$ функциясы үшін (5.1) теңдігі

$$f'(z)=\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta U + i\cdot \Delta V}{\Delta x + i\cdot \Delta y} \qquad (5.2)$$

түрінде жазылады, мұндағы

$$\Delta U = U(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - U(x,\, y), \qquad \Delta V = V(x+\Delta x,\, y+\Delta y) - V(x,\, y).$$

(5.2) теңдігінен, егер $f(z) = U(x;\, y) + i\cdot V(x;\, y)$ дифференциалданатын функция болса, онда $U$ және $V$ функцияларының

$$\frac{\partial U(x;y)}{\partial x} = \frac{\partial V(x;y)}{\partial y}; \qquad \frac{\partial U(x;y)}{\partial y} = -\frac{\partial V(x;y)}{\partial x} \qquad (5.3)$$

теңдіктерін қанағаттандыратыны шығады. Бұл теңдіктер *Коши-Риман шарттары* деп аталады. Коши-Риман шарттары $f(z) = U(x;\, y) + i\cdot V(x;\, y)$ функциясының дифференциалдануының қажетті шарттары болады.

Егер U(x,y) және V(x,y) функциялары (x,y) нүктесінде Коши-Риман шарттарын қанағаттандыруларымен қатар дифференциалданатын функциялар болса, онда $f(z) = U(x;\, y) + i\cdot V(x;\, y)$ функциясы z=x+iy нүктесінде дифференциалданатын функция болады.

Сонымен қатар (4.2) теңдігі мен (4.3) Коши-Риман шарттарынан туынды табудың келесі формулаларын аламыз:

$$f'(z)=\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + i\frac{\partial U}{\partial x}. \qquad (5.4)$$

$(r, \varphi)$ полярлық координаталарында (5.3) *Коши–Риман шарттары* мен

(5.4) формуласы сәйкесінше төмендегі түрлерде жазылады:

$$\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial V}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi},$$

$$f'(z)=\frac{r}{z}\cdot\left(\frac{\partial U}{\partial r}+i\cdot\frac{\partial V}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}-i\cdot\frac{\partial U}{\partial \varphi}\right). \qquad (5.5)$$

Комплекс айнымалы функциялар үшін нақты аргументті функциялар теориясындағы дифференциалдау ережелері толығымен сақталады:

1. $\left[f(z)\pm g(z)\right]' = f'(z)\pm g'(z);$
2. $\left[f(z)\cdot g(z)\right]' = f'(z)g(z)+f(z)g'(z);$
3. $\left[\dfrac{f(z)}{g(z)}\right]' = \dfrac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)};$
4. $\dfrac{df\left[g(z)\right]}{dz}=\dfrac{df}{dg}\cdot\dfrac{dg}{dz}.$

Егер f(z) функциясы $z_0$ нүктесінің қандайда бір аймағында дифференциалданатын болса, онда ол $z_0$ нүктесінде *аналитикалық* немесе *голоморфты* деп аталады.

Комплекс сандар жазықтығының f(z) бірмәнді функциясы аналитикалық болатын нүктелері осы функцияның *дұрыс нүктелері*, ал аналитикалық болмайтын нүктелері сол функцияның *айрықша (ерекше) нүктелері* деп аталады.

**Анықтама 18**. Егер екінші ретке дейінгі дербес туындылары D облысында үзіліссіз болатын және осы облыста *Лаплас теңдігі деп* аталатын

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$$

теңдігін қанағаттандыратын $U(x;y)$ нақты функциясы D облысында *гармониялық* деп аталады.

Коши-Риман шартынан аналитикалық функцияның нақты және жорамал бөліктерінің *гармониялық функциялар* болатыны шығады.

Бірақ U(x,y) және V(x,y) функцияларының гармониялық болуларынан $f(z)=U(x;y)+i\cdot V(x;y)$ функиясының аналитикалық болуы шыға бермейді: $f(z)$ аналитикалық болуы үшін U(x,y) және V(x,y) функциялары қосымша Коши-Риман шарттарын қанағатандырулары керек.

Коши-Риман шарттарын қанағаттандыратын екі гармониялық функция *түйіндес* деп аталады. Сонымен, U(x,y) және V(x,y) функциялары түйіндес болса, $f(z)=U(x;y)+i\cdot V(x;y)$ функциясы аналитикалық болады.